§ Teoria Quântica da Radiação

§.§ Campo de Radiação Clássico

Discutimos primeiro a condição de "Transversilidade" do potencial vetorial satisfazendo

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 ,$$

dentro do marco da eletrodinâmica clássica. Os campos elétrico e magnéticos que derivam de um potencial que satisfaz a condição acima são chamados "Campos Transversos" ou "Campos de Radiação".

O potencial vetorial $\vec{A}$ sempre pode ser decomposto como

$$\vec{A} = \vec{A}_{\perp} + \vec{A}_{\parallel} ,$$

com

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\perp} = 0 , \qquad \nabla \times \vec{A}_{\parallel} = 0$$

$\vec{A}_{\perp}$: componente transversa,
$\vec{A}_{\parallel}$: componente longitudinal.

Fermi (1930): $\vec{A}_{\parallel}$ e φ dão conta das interações instantâneas (e estáticas) das interações de Coulomb entre partículas carregadas; $\vec{A}_{\perp}$ da conta da radiação eletromagnética das cargas em movimento.

Referências:

Sakurai (AQM)
D. Bohm ("Quantum Theory")

O Hamiltoniano total de partículas cargadas (não relativísticas) e dos campos eletromagnéticos gerados (sem incluir as interações dos momentos magnéticos) é dado por:

$$\mathcal{H} = \sum \frac{1}{2m_j}\left[\vec{p}_j - e_j \frac{\vec{A}_\perp(\vec{x})}{c}\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \mathcal{H}_{Rad},$$

onde $\mathcal{H}_{Rad}$ é o Hamiltoniano livre de $\vec{A}_\perp$ somente.
O formalismo de Fermi é baseado na escolha do "gauge" ou calibre para os potenciais. Este é chamado de "gauge de Coulomb" ou calibre transverso.

Uma transformação de gauge para os potenciais é dada por:

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda \\ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \end{cases}$$

Na ausência de fontes, $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, sempre podemos escolher o calibre para termos

$$\varphi \equiv 0 , \qquad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \quad (\text{Coulomb})$$

De fato, seja então $\vec{A}'$ talque $\nabla\cdot\vec{A}' = 0$

$$0 = \nabla\cdot\vec{A}' = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2\Lambda$$

Esta condição é uma equação para o gauge Λ :

$$\nabla^2\Lambda = -\nabla\cdot\vec{A} \quad , \quad (\text{Eq. tipo Poisson})$$

com solução :

$$\Lambda(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}\,' \frac{\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Vejamos as implicações para o potencial escalar φ.
Para o vácuo temos:

$$0 = \nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\left\{\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\}$$

$$= -\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\underbrace{(\nabla\cdot\vec{A})}_{0} = -\nabla^2\varphi .$$

Resulta que φ é solucão da equação de Laplace.
A única solução regular em todo o espaço, na ausência de cargas, é $\underline{\varphi = \text{cte}}$. Escolhemos φ como sendo

$$\varphi \equiv 0$$

Assim o calibre de Coulomb é caraterizado por:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{A} = 0, & \varphi \equiv 0 \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}, & \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{array}}$$

Finalmente substituindo na eq. de Maxwell:

$$0 = \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}$$

Usar identidade: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, e a condição $\nabla \cdot \vec{A} = 0$,

$$\boxed{0 = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}, \qquad \text{Eq. de ondas}}$$

§ Descomposição de Fourier dos campos

Expandimos o campo $\vec{A}$ em série de Fourier, assumindo condições periódicas de contorno sobre um cubo de volume

$$V = L^3,$$

para um instante fixo do tempo, digamos para $t = 0$:

$$\vec{A}(\vec{x},t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \Big\{ c_{\vec{k}\alpha}(0)\, \vec{u}_{\vec{k}\alpha}(\vec{x}) + c^*_{\vec{k}\alpha}(0)\, \vec{u}^*_{\vec{k}\alpha}(\vec{x}) \Big\},$$

com

$$\vec{u}_{\vec{k}\alpha}(\vec{x}) \equiv \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

$\vec{\varepsilon}^{(\alpha)}$: vetor de polarização (real) linear (unitário)

A condição periódica de contorno fornece:

$$1 = e^{ik_xL} = e^{ik_yL} = e^{ik_zL},$$

com

$$k_j = \left(\frac{2\pi}{L}\right) n_j\,, \quad n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad j = x, y, z$$

A condição de transversalidade se traduz por:

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0 = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \Big\{ c_{\vec{k}\alpha}(0)\,(\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}^{(\alpha)})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - c^*_{\vec{k}\alpha}(0)\,(\vec{k}\cdot\varepsilon^{(\alpha)})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Big\}.$$

Uma série de Fourier identicamente nula, tem os seus coeficientes nulos. Daí:

$$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}^{(\alpha)} = 0},$$

mostrando que os vetores de polarização são ortogonais à direção de propagação. Temos assim duas direções de polarização independentes. Escrevemos $\alpha = 1,2$, e escolhemos os vetores ortogonais:

$$\vec{\varepsilon}^{(1)} \cdot \vec{\varepsilon}^{(2)} = \vec{\varepsilon}^{(1)} \cdot \vec{k} = \vec{\varepsilon}^{(2)} \cdot \vec{k} = 0 .$$

O sistema $\left(\vec{\varepsilon}^{(1)}, \vec{\varepsilon}^{(2)}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right)$ é escolhido como um sistema ortonormal de orientação positiva.

Para um tempo t arbitrário, escrevemos:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \left\{ C_{\vec{k}\alpha}(t)\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + C^{*}_{\vec{k}\alpha}(t)\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}.$$

Sabemos que $\vec{A}$ satisfaz a equação de ondas. Portanto

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \vec{k}^2 \left\{ C_{\vec{k}\alpha}(t)\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + c.c. \right\}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} C_{\vec{k}\alpha}(t)\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + c.c. \right\},$$

fornecendo:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} C_{\vec{k}\alpha}(t) + c^2 \vec{k}^2 C_{\vec{k}\alpha}(t) = 0},$$

com soluções:

$$C_{\vec{k}\alpha}(t) = C_{\vec{k}\alpha}(0)\, e^{-i\omega_k t} \quad , \quad C^*_{\vec{k}\alpha}(t) = C^*_{\vec{k}\alpha}(0)\, e^{i\omega_k t} ,$$

com a relação de dispersão:

$$\boxed{\omega_k = c|\vec{k}|} \quad .$$

Estas soluções satisfazem o requerimento de $\vec{A}$ ser real. Usando a notação relativística, escrevemos de maneira compacta:

$$-k_\mu x^\mu \equiv \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t \equiv -kx \quad ,$$

Assim:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \Big\{ C_{\vec{k}\alpha}(0)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)}\, e^{-i(k\circ x)} + \\ + C^*_{\vec{k}\alpha}(0)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)}\, e^{+i(k\circ x)} \Big\}$$

O Hamiltoniano do campo tem que ser escrito nas componentes de Fourier:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int d\vec{x}\, \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)$$

Precisamos calcular os campos:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} = \frac{i}{c}\sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{\sqrt{V}}\left\{ C_{\vec{k}\alpha}(0)\vec{\epsilon}^{(\alpha)} e^{-i(k\circ x)} - \right.$$
$$\left. - \text{c.c.} \right\}$$

$$= i \sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{V}}\left\{ C_{\vec{k}\alpha}(0)\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)} e^{-i(k\circ x)} - \text{c.c.}\right\}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{\vec{k} \\ \alpha=1,2}} \left\{ C_{\vec{k}\alpha}(0)\left[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{(\alpha)}\right] e^{-i(k\circ x)} - \right.$$
$$\left. - \text{c.c.} \right\},$$

e para a densidade de Energia obtemos

$$\vec{E}^2 = -\sum_{\vec{k}\vec{k}'}\sum_{\alpha,\alpha'}\frac{1}{V}|\vec{k}||\vec{k}'|\left\{ C_{\vec{k}\alpha}(0)\, C_{\vec{k}'\alpha'}(0)\left[\epsilon^{(\alpha)}_{(\vec{k})}\cdot\epsilon^{(\alpha')}_{(\vec{k}')}\right] e^{-i(k\circ x)} e^{-i(k'\circ x)} \right.$$
$$- C_{\vec{k}\alpha}(0)\, C^{*}_{\vec{k}'\alpha'}(0)\left[\vec{\epsilon}^{(\alpha)}_{(\vec{k})}\cdot\vec{\epsilon}^{(\alpha')}_{(\vec{k}')}\right] e^{-i(k\cdot x)} e^{+i(k'\cdot x)}$$
$$\left. + \text{c.c.} \right\}$$

e para a parte de $\vec{B}$:

$$\vec{B}^2 = -\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\sum_{\alpha}\sum_{\alpha'}\Big\{$$

$$\Big\{ C_{\vec{k}\alpha}(0)\, C_{\vec{k}'\alpha'}(0)\, e^{-i(k\circ x)}\, e^{-i(k'\circ x)} \left[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{(\alpha)}_{(\vec{k})}\right]\circ\left[\vec{k}'\times\vec{\epsilon}^{(\alpha')}_{(\vec{k}')}\right]$$

$$- C_{\vec{k}\alpha}(0)\, C^{*}_{\vec{k}'\alpha'}(0)\, e^{-i(k-k')\circ x} \left[\vec{k}\times\epsilon^{(\alpha)}_{(\vec{k})}\right]\cdot\left[\vec{k}'\times\epsilon^{(\alpha')}_{(\vec{k}')}\right]$$

$$+ \; c.c. \Big\}$$

Calcular os produtos:

$$\left[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{(\alpha)}\right]\cdot\left[\vec{k}'\times\vec{\epsilon}^{(\alpha')}\right] = \left[\left(\vec{k}'\times\vec{\epsilon}^{(\alpha')}\right)\times\vec{k}\right]\cdot\ \vec{\epsilon}^{(\alpha)}$$

$$= \left[(\vec{k}'\cdot\vec{k})\,\vec{\epsilon}^{(\alpha')} - (\vec{\epsilon}^{(\alpha')}\cdot\vec{k})\,\vec{k}'\right]\cdot\ \vec{\epsilon}^{(\alpha)}$$

onde usamos que

$$\vec{A}\times\vec{B}\ \cdot\vec{C} = \vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B}\ ,$$

e temos as seguintes integrações sobre a parte espacial:

$$\frac{1}{V}\int d\vec{x}\ e^{\pm i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta_{\vec{k}',-\vec{k}}$$

$$\frac{1}{V}\int d\vec{x}\ e^{\pm i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}$$

Para os termos (CC) temos $\vec{k}'=-\vec{k}$

$$\left[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{(\alpha)}\right]\cdot\left[\vec{k}'\times\vec{\epsilon}^{(\alpha')}\right] =$$

$$= -\vec{k}^2[\vec{\epsilon}^{(\alpha)}\cdot\vec{\epsilon}^{(\alpha')}] + (\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}^{(\alpha)}}_{0})(\underbrace{\vec{k}'\cdot\vec{\epsilon}^{(\alpha')}}_{0})$$

$$= -|\vec{k}|^2[\vec{\epsilon}^{(\alpha)}\cdot\vec{\epsilon}^{(\alpha')}]$$

este termo na parte magnética compensa o correspondente termo da parte elétrica. Não temos termos do tipo (cc) nem (c^*c^*).

Para os termos (cc^*) obtemos $\vec{k}'=\vec{k}$

$$[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{(\alpha)}]\cdot[\vec{k}'\times\vec{\epsilon}^{(\alpha')}] = |\vec{k}|^2[\vec{\epsilon}^{(\alpha)}_{(\vec{k})}\cdot\vec{\epsilon}^{(\alpha')}_{(\vec{k})}] = \delta_{\alpha\alpha'}|\vec{k}|^2$$

Obtendo:

$$\int d\vec{x}\,(E^2+B^2) = \sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha=1,2} 2|\vec{k}|^2\Big\{C_{\vec{k}\alpha}(0)\,C^*_{\vec{k}\alpha}(0)\,e^{-i\omega_k t}\,e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}\Big\}$$

$$= \sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha=1,2} 4|\vec{k}|^2\,C^*_{\vec{k}\alpha}(0)\,C_{\vec{k}\alpha}(0),$$

e para o Hamiltoniano

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}\int d\vec{x}\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha=1,2}\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 C^*_{\vec{k}\alpha}(0)\,C_{\vec{k}\alpha}(0)}$$

Se o fator $e^{\pm i\omega_k t}$ é incorporado em $\mathcal{H}$ temos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 C^*_{\vec{k}\alpha}(t)\, C_{\vec{k}\alpha}(t)$$

Mostremos agora que o Hamiltoniano do campo pode ser considerado como uma coleção de osciladores harmônicos. Lembramos que os coeficientes de Fourier satisfazem as equações:

$$\ddot{C}_{k\alpha} = -\omega_k^2 C_{k\alpha} \quad , \quad \ddot{C}^*_{k\alpha} = -\omega_k^2 C^*_{k\alpha}$$

Definimos então coordenadas reais por

$$Q_{k\alpha} \equiv \lambda(C_{k\alpha} + C^*_{k\alpha}), \quad \lambda \text{ real}$$

com
$$P_{k\alpha} = \dot{Q}_{k\alpha} = \lambda(\dot{C}_{k\alpha} + \dot{C}^*_{k\alpha})$$
$$= \lambda(-i\omega_k C_{k\alpha} + i\omega_k C^*_{k\alpha})$$
$$= -i\omega_k \lambda (C_{k\alpha} - C^*_{k\alpha}),$$

i.e.

$$\begin{cases} Q_{\vec{k}\alpha} = \lambda (C_{\vec{k}\alpha} + C^*_{\vec{k}\alpha}) \\ P_{\vec{k}\alpha} = -i\omega_k \lambda (C_{\vec{k}\alpha} - C^*_{\vec{k}\alpha}) \end{cases}$$

A transformação inversa fornece:

$$C_{\vec{k}\alpha} = \frac{1}{2\lambda} Q_{\vec{k}\alpha} - \frac{1}{2i\omega_k\lambda} P_{\vec{k}\alpha}$$
$$= \frac{1}{2\lambda}\left(Q_{\vec{k}\alpha} + i\frac{1}{\omega_{\vec{k}}} P_{\vec{k}\alpha}\right)$$

e

$$\overset{*}{C}_{\vec{k}\alpha} = \frac{1}{2\lambda}\left(Q_{\vec{k}\alpha} - i\,\frac{P_{\vec{k}\alpha}}{\omega_{\vec{k}}}\right)$$

O Hamiltoniano, em termo das novas variáveis, fica como:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha=1,2}\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 \frac{1}{4\lambda^2}\left(Q_{\vec{k}\alpha}^2 + \frac{P_{k\alpha}^2}{\omega_k^2}\right)$$
$$= \sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha=1,2}\frac{1}{8\pi\lambda^2}\frac{1}{\omega_k^2}\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2\left(P_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega_k^2 Q_{k\alpha}^2\right)$$

Queremos que:

$$\frac{1}{8\pi\lambda^2}\,\frac{1}{\omega_k^2}\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi c^2\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}}$$

A transformação completa tem a forma:

$$\begin{cases} C_{\vec{k}\alpha} = c\sqrt{\pi}\left(Q_{\vec{k}\alpha} + i\,\dfrac{P_{\vec{k}\alpha}}{\omega_{\vec{k}}}\right), \\ C^{*}_{\vec{k}\alpha} = c\sqrt{\pi}\left(Q_{\vec{k}\alpha} - i\,\dfrac{P_{\vec{k}\alpha}}{\omega_{\vec{k}}}\right), \end{cases}$$

com o Hamiltoniano final:

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2}\left(P^2_{\vec{k}\alpha} + \omega_k^2 Q^2_{\vec{k}\alpha}\right)}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{k\alpha} &= -i\omega_k \lambda\left(\dot{C}_{k\alpha} - \dot{C}^{*}_{k\alpha}\right) \\ &= -i\omega_k \lambda\left(-i\omega_k C_{k\alpha} - i\omega_k C^{*}_{k\alpha}\right) \\ &= -\omega_k^2 \lambda\left(C_{k\alpha} + C^{*}_{k\alpha}\right) \\ &= -\omega_k^2 Q_{k\alpha} \end{aligned}$$

Assim vemos que as coordenas $(Q_{\vec{k}\alpha}, P_{\vec{k}\alpha})$ são canônicas, porque:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_{\vec{k}\alpha}} = \omega_k^2 Q_{\vec{k}\alpha} = -\dot{P}_{\vec{k}\alpha},$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\vec{k}\alpha}} = P_{\vec{k}\alpha} = \dot{Q}_{\vec{k}\alpha},$$

isto é, são satisfeitas as equações de Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_{\vec{k}\alpha}} = -\dot{P}_{\vec{k}\alpha} ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\vec{k}\alpha}} = Q_{\vec{k}\alpha} .$$

A radiação livre pode portanto ser considerada como um conjunto de osciladores harmônicos, onde cada modo está caraterizado por $(\vec{k}, \alpha)$, com

$$\omega_{k} = c|\vec{k}| ,$$

e onde as variáveis dinâmicas são combinações lineares de coeficientes de Fourier.

§ Quantização do Campo de Radiação

No fim do século passado já era conhecido este fato, que a evolução de um campo eletromagnético de radiação era semelhante a uma coleção de osciladores harmônicos. Porém a estatística de Boltzmann e o contínuo das energias produz uma divergência na energia contida na cavidade. A saída (Planck) foi postular a quantização da energia (1901). Aqui, seguindo Dirac, fazemos uma quantização canônica do Hamiltoniano obtido na seção anterior:

$$\mathcal{H}(Q_{\vec{k}\mu}, P_{\vec{k}\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \left(P_{\vec{k}\mu}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k}\mu} \right)$$

Entendemos que as variáveis dinâmicas $(Q_{\vec{k}\mu}, P_{\vec{k}\mu})$ representam operadores com as seguintes relações de comutação:

$$\left[Q_{\vec{k}\mu}, P_{\vec{k}'\mu'} \right] = i\hbar\, \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\mu\mu'}$$

$$\left[Q_{\vec{k}\mu}, Q_{\vec{k}'\mu'} \right] = 0, \quad \left[P_{\vec{k}\mu}, P_{\vec{k}'\mu'} \right] = 0 .$$

Junto com estes operadores, definimos também operadores de criação e destruição:

$$a_{\vec{k}\mu} \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left(\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}\mu} + i P_{\vec{k}\mu} \right)$$

$$a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\vec{k}}}}\left(\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}\mu} - i\, P_{\vec{k}\mu}\right).$$

Eles satisfazem a álgebra seguinte:

$$[a_{\vec{k}\mu}, a^{\dagger}_{\vec{k}'\mu'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'} ,$$

$$[a_{\vec{k}\mu}, a_{\vec{k}'\mu'}] = 0, \quad [a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}, a^{\dagger}_{\vec{k}'\mu'}] = 0 ,$$

que sabemos é caraterística do bósons (Bose-Einstein).
Estes operadores derivam das componentes clássicas do desenvolvimento de Fourier:

$$a_{\vec{k}\mu}(\text{clássico}) \longrightarrow c\,(4\pi)^{1/2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\; a_{\vec{k}\mu}(\text{quântico})$$

O operador número é dado por:

$$N_{\vec{k},\mu} \equiv a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} a_{\vec{k}\mu} ,$$

com as relações de comutação:

$$[a_{\vec{k}\mu}, N_{\vec{k}'\mu'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\, a_{\vec{k}\mu} ,$$

$$[a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}, N_{\vec{k}'\mu'}] = -\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\, a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} .$$

A partícula associada com este campo (radiação eletromagnética) é chamada de fóton. O vetor de onda $\vec{k}$ será associado com o momentum do fóton (dividido por $\hbar$), e μ representará o estado de polarização do fóton. Para representar a situação em que temos vários tipos de fótons com valores diferentes de $(\vec{k},\mu)$, consideramos kets na representação de <u>números de ocupação</u>:

$$|n_{\vec{k}_1\mu_1}, n_{\vec{k}_2\mu_2}, \ldots, n_{\vec{k}_i\mu_i}, \ldots\rangle = |n_{\vec{k}_1\mu_1}\rangle |n_{\vec{k}_2\mu_2}\rangle \cdots |n_{\vec{k}_i\mu_i}\rangle \cdots,$$

onde temos $n_{\vec{k}\mu}$ fótons no estado $(\vec{k},\mu)$, ...

► <u>Vácuo</u>:

$$|0\rangle = |0_{\vec{k}_1\mu_1}\rangle |0_{\vec{k}_2\mu_2}\rangle \cdots |0_{\vec{k}_i\mu_i}\rangle \cdots$$

com $\quad N_{\vec{k}\mu}|0\rangle = 0, \quad$ para todo $(\vec{k},\mu)$

► <u>Estados de um fóton</u>:

$$a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}|0\rangle$$

No caso geral temos:

$$a^{\dagger}_{\vec{k}_i\mu_i}|n_{\vec{k}_1\mu_1}, n_{\vec{k}_2\mu_2} \ldots n_{\vec{k}_i\mu_i} \ldots\rangle =$$

$$= \sqrt{n_{\vec{k}_i\mu_i}+1}\ \left| n_{\vec{k}_1\mu_1} \dots (n_{\vec{k}_i\mu_i}+1) \dots \right\rangle ,$$

e

$$\boxed{\left| n_{\vec{k}_1\mu_1}, n_{\vec{k}_2\mu_2}, \dots, n_{\vec{k}_i\mu_i}, \dots \right\rangle = \prod_{\substack{\vec{k}_i \\ \mu_i}} \frac{\left(a^{\dagger}_{\vec{k}_i\mu_i}\right)^{n_{\vec{k}_i\mu_i}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_i\mu_i}!}} \left|0\right\rangle ,}$$

onde todos os operadores de criação comutam (Bose-Einstein)

<u>Trilogia Hinduísta</u>:

Criador	Destruidor	Conservador
$a^{\dagger}$	a	$N = a^{\dagger}a$
(Brahma)	(Shiva)	(Vishnu)

A expansão do potencial $\vec{A}(\vec{x},t)$ fica agora:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k} \\ k_z>0}} \sum_{\mu=1,2} c\,(4\pi)^{1/2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \left[a_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \right.$$

$$\left. + \ a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} c \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{2\omega_k}} \left[a_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \right.$$

$$\left. + \ a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k} \\ \mu=1,2}} c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}} \left[a_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{\dagger}_{\vec{k}\mu}\, \hat{e}^{(\mu)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

O Hamiltoniano também pode ser escrito nas variáveis canônicas simetrizando convenientemente:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} k^2\, a_{\vec{k}\mu} a^{*}_{\vec{k}\mu}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 c^2 (4\pi) \frac{\hbar}{2\omega_k} \left(\frac{a_{\vec{k}\mu} a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} + a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} a_{\vec{k}\mu}}{2} \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} \left(a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} a_{\vec{k}\mu} + a_{\vec{k}\mu} a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} \right),$$

e usando as relações de comutação obtemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} a_{\vec{k}\mu} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}\mu} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}}$$

com $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$.

Energia do estado fundamental:

$$N_{\vec{k}\mu} = 0, \quad \text{para todo } (\vec{k}, \mu)$$

$$E_0 = \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} \longrightarrow \infty$$

mas converge para o interior de uma caixa (cavidade) de volume finito V para um "lattice" de constante da rede a finito (cutoff do ultravioleta). A energia $\frac{\hbar\omega}{2}$ está associada ao ponto zero do oscilador e portanto representa flutuações quânticas (Princípio de Incerteza). A energia (infinita) $E_0 = \sum_{\vec{k}\mu} \hbar\omega/2$ está portanto associada à flutuações do vácuo. O ponto zero da energia é inobservável (no caso de um cristal, teríamos que destruir o sistema ou fundir o cristal; isto é mais difícil de fazer tratando-se do vácuo). O que tem sentido físico é o que acontece por cima do vácuo, ou a diferença de energia devida a uma mudança das condições de contorno (efeito Casimir). É impossível extrair energia do vácuo, já que o campo está na menor energia possível.

Redefinimos então a energia do vácuo como sendo nula:

$$\mathcal{H}|0\rangle = 0 .$$

Tiramos de $\mathcal{H}$ a constante (infinita) da energia do vácuo:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \hbar\omega_{\vec{k}}\, a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} a_{\vec{k}\mu}$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \hbar\omega_{\vec{k}}\, N_{\vec{k}\mu} ,$$

e operando sobre um estado de muito fótons:

$$\mathcal{H}\,|\, n_{\vec{k}_1\mu_1}, n_{\vec{k}_2\mu_2} \cdots \rangle = \Big(\sum_{\vec{k}_i,\mu_i} n_{\vec{k}_i\mu_i}\, \hbar\omega_{\vec{k}_i}\Big)\,|\, n_{\vec{k}_1\mu_1}, n_{\vec{k}_2\mu_2} \cdots \rangle$$

O momentum total do campo de radiação é dado na Eletrodinâmica Clássica pela integral sobre todo o espaço do vetor de Poynting $\frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})$

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi}\int d\vec{x}\,(\vec{E}\times\vec{B}) \longrightarrow \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \hbar\vec{k}\, a^{\dagger}_{\vec{k}\mu} a_{\vec{k}\mu}$$

ou

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu=1,2} \hbar\vec{k}\, N_{\vec{k}\mu}$$

▶ Exercício. Fazer a demonstração como exercício, a partir da expressão do campo $\vec{A}(\vec{x},t)$

Para estados de um único fóton temos:

$$\mathcal{H}\left(a^{+}_{\vec{k}\mu}|0\rangle\right) = \hbar\omega_{\vec{k}}\left(a^{+}_{\vec{k}\mu}|0\rangle\right)$$

$$\vec{P}\left(a^{+}_{\vec{k}\mu}|0\rangle\right) = \hbar\vec{k}\left(a^{+}_{\vec{k}\mu}|0\rangle\right)$$

com $\quad \hbar\omega_{\vec{k}} = \hbar c\,|\vec{k}|\quad , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$.

A massa do fóton é dada por:

$$m^2 = \frac{1}{c^4}\left(E^2 - |\vec{p}|^2c^2\right)$$

$$= \frac{1}{c^4}\left(\hbar^2c^2k^2 - \hbar^2k^2c^2\right) = 0$$

O estado do fóton não é caraterizado apenas pelo seu momentum $\hbar\vec{k}$, mas também pela sua polarização $\hat{\epsilon}^{(\mu)}$. Temos dois estados de polarização transversa. Os estados de polarização podem ser descritos por vetores complexos (vetores de polarização circular). Consideremos os vetores

$$\hat{\epsilon}^{(\pm)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\epsilon}^{(1)} \pm i\,\hat{\epsilon}^{(2)}\right)$$

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}^{(+)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\epsilon}^{(1)} + i\,\hat{\epsilon}^{(2)}\right) , & \hat{\epsilon}^{(+)*} = -\,\hat{\epsilon}^{(-)} \\[2ex] \hat{\epsilon}^{(-)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\epsilon}^{(1)} - i\,\hat{\epsilon}^{(2)}\right) & \end{cases}$$

Estes vetores de polarização circular servem para caraterizar o "spin" do foton. Em efeito, realizando uma rotação infinitesimal em torno da direção de propagação $\vec{k}$, em ângulo $\delta\varphi$, temos:

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}^{(1)} \longrightarrow \cos\varphi\, \hat{\epsilon}^{(1)} + \sin\varphi\, \hat{\epsilon}^{(2)} , \\ \hat{\epsilon}^{(2)} \longrightarrow -\sin\varphi\, \hat{\epsilon}^{(1)} + \cos\varphi\, \hat{\epsilon}^{(2)} , \end{cases}$$

e para uma rotacão infinitesimal em $\delta\varphi$:

$$\hat{\epsilon}^{(1)} \longrightarrow \hat{\epsilon}^{(1)} + \delta\varphi\, \hat{\epsilon}^{(2)} ,$$
$$\hat{\epsilon}^{(2)} \longrightarrow -\delta\varphi\, \hat{\epsilon}^{(1)} + \hat{\epsilon}^{(2)} .$$

A variação para os vetores de polarização circular é:

$$\delta \hat{\epsilon}^{(\pm)} = \mp \frac{\delta\varphi}{\sqrt{2}} \left(\hat{\epsilon}^{(2)} \mp i\, \hat{\epsilon}^{(1)} \right)$$
$$= \mp\, i\, \delta\varphi\, \hat{\epsilon}^{(\pm)}$$

Este comportamento é típico de funções próprias do momentum angular com $J=1$, $J_z = \pm 1$. Lembrar que

$$\frac{d}{d\varphi} e^{-im\varphi} = -im\, e^{-im\varphi} ,$$

ou

$$\delta\left(e^{-im\varphi}\right) = -im\,\delta\varphi\, e^{-im\varphi}$$

Associamos portanto $\hat{\epsilon}^{(\pm)}$ com as componentes do spin para $j=1$, $m=\pm 1$, quando o eixo de quantização tem sido escolhido ao longo de $\vec{k}$. Se $\hat{\epsilon}^{(\alpha)}$ fosse paralelo a $\vec{k}$, esta polarização poderia ser associada com $\underline{m=0}$ (invariante por rotação). Mas este estado não aparece na expansão de $\vec{A}$ devido à condição de "transversalidade":

$$\vec{k} \cdot \hat{\epsilon}^{(\alpha)} = 0 .$$

Resultado: "O spin do fóton é paralelo ou anti-paralelo à direção de propagação"

A ausência da componente $m=0$ só tem um significado invariante quando a massa da partícula é estritamente nula.

Representação de Polarização Circular:

$$\hat{\epsilon}^{(\pm)} \cdot \hat{\epsilon}^{(\pm)*} = - \hat{\epsilon}^{(\pm)} \cdot \hat{\epsilon}^{(\mp)} = 1$$
$$\hat{\epsilon}^{(\pm)} \cdot \hat{\epsilon}^{(\mp)*} = - \hat{\epsilon}^{(\pm)} \cdot \hat{\epsilon}^{(\pm)} = 0$$
$$\vec{k} \cdot \hat{\epsilon}^{(\pm)} = 0$$

Os estados de polarização circular podem ser obtido por operadores de destruição e criação dados por:

$$\begin{cases} a^{\dagger}_{\vec{k},\pm} = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a^{\dagger}_{\vec{k},1} \pm i\, a^{\dagger}_{\vec{k},2}\right) \\ \\ a_{\vec{k},\pm} = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{\vec{k},1} \mp i\, a_{\vec{k},2}\right) \end{cases}$$

Esta é uma transformação unitária dos operadores e preserva as relações de comutação. De maneira inversa, o estado de um fóton

$$a^{\dagger}_{\vec{k}\alpha}|0\rangle \,, \quad \alpha = 1,2 \,,$$

pode ser considerado como uma superposição dos estados com $m=+1$ e $m=-1$, com 50% e 50% de probabilidade.

Resultado final: O postulado de quantização aplicado ao campo de Radiação eletromagnética conduz à idéia de que as excitações mecânico-quânticas do campo de radiação podem ser consideradas como partículas de massa zero e spin $s=1$.

Esta idéia pode ser estendida:
"Para todo campo associamos uma partícula de massa e spin definidos".

A quantização de outros campos pode ser feita de maneira completamente análoga

A forma do Hamiltoniano é invariante frente à nova representação. Temos:

$$a^{+}_{\vec{k}+} a_{\vec{k}+} = \frac{1}{2}\left(a^{+}_{\vec{k}1} a_{\vec{k}1} + a^{+}_{\vec{k}2} a_{\vec{k}2} + i\, a^{+}_{\vec{k}1} a_{\vec{k}2} - i\, a^{+}_{\vec{k}2} a_{\vec{k}1}\right),$$

$$a^{+}_{\vec{k}-} a_{\vec{k}-} = \frac{1}{2}\left(a^{+}_{\vec{k}1} a_{\vec{k}1} + a^{+}_{\vec{k}2} a_{\vec{k}2} - i\, a^{+}_{\vec{k}1} a_{\vec{k}2} + i\, a^{+}_{\vec{k}2} a_{\vec{k}1}\right),$$

de maneira que:

$$a^{+}_{\vec{k}+} a_{\vec{k}+} + a^{+}_{\vec{k}-} a_{\vec{k}-} = a^{+}_{\vec{k}1} a_{\vec{k}1} + a^{+}_{\vec{k}2} a_{\vec{k}2} ,$$

e para o Hamiltoniano:

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=\pm} \hbar\omega_{\vec{k}}\, a^{+}_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}} ,$$

porque a energia do fóton não depende de sua polarização. A dependência temporal de $a^{+}_{\vec{k}\alpha}$ e $a_{\vec{k}\alpha}$ pode ser determinada usando a "versão" de Heisenberg. Ali:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{\vec{k}\alpha} &= \frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H}, a_{\vec{k}\alpha}\right] \\
&= \frac{i}{\hbar}\sum_{\vec{k}'}\sum_{\mu} \hbar\omega_{\vec{k}'}\left[a^{+}_{\vec{k}'\mu} a_{\vec{k}'\mu}, a_{\vec{k}\alpha}\right] \\
&= -\frac{i}{\hbar}\sum_{\vec{k}'}\sum_{\mu} \hbar\omega_{\vec{k}'}\,\underbrace{\left[a_{\vec{k}\alpha}, a^{+}_{\vec{k}'\mu}\right]}_{\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\alpha\mu}} a_{\vec{k}'\mu}
\end{aligned}$$

$$= -i\omega_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}\alpha} \quad , e \quad \ddot{a}_{\vec{k}\alpha} = -\omega_k^2\, a_{\vec{k}\alpha}$$

Integrando a dependência temporal:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}\alpha}(t) = a_{\vec{k}\alpha}(0)\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t} , \\ a^+_{\vec{k}\alpha}(t) = a^+_{\vec{k}\alpha}(0)\, e^{i\omega_{\vec{k}} t} . \end{cases}$$

A expansão para o potencial vetorial $\vec{A}$, na versão de Heisenberg, fica:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=\pm} c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}}} \left\{ a_{\vec{k}\alpha}(0)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + a^+_{\vec{k}\alpha}(0)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)*}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right\}}$$

§ Quantização de um Campo Escalar

Tomaremos como exemplo um campo escalar muito simples, neste caso associado com as oscilações de um meio elástico em 1-dim